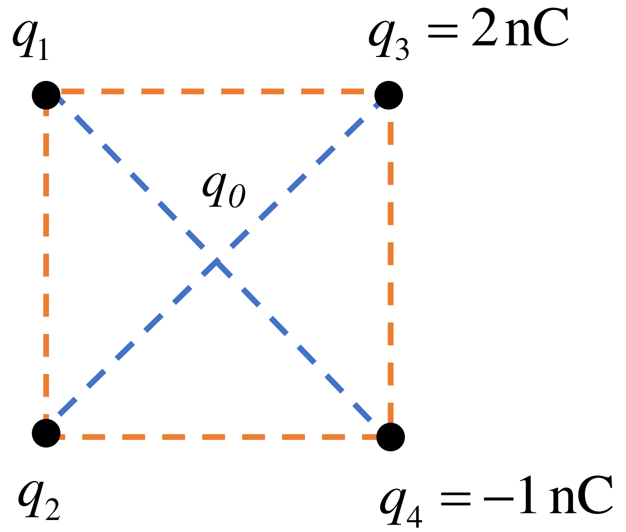
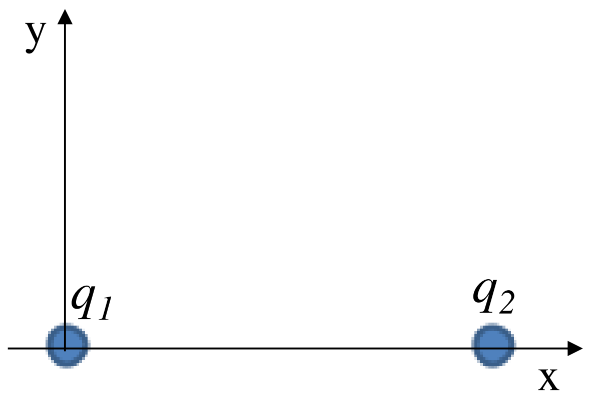
Ejercicio 5 – Guía 1 – Ley de Coulomb

5. Cuatro cargas puntuales se encuentran ubicadas sobre los vértices de un cuadrado. Determinar los valores de las cargas q_1 y q_2 para que la carga puntual q_0 no sienta ninguna fuerza sobre ella. ¿Dependen del valor y/o signo de la carga q_0? ¿Dependen del valor del lado del cuadrado? ¿Cuántas soluciones existen?



Lecturas previas: Capítulo 1 de apuntes de Electricidad y Magnetismo, secciones de 1 a 9



La **Ley de Coulomb** establece que si q_1 y q_2 son dos cargas puntuales, la fuerza eléctrica que q_2 ejerce sobre q_1, en el SI está dada por

$$\vec{F}_{q_2\to q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}$$

Si analizamos las unidades, como $\left[\vec{F}\right] = \mathrm{N}$ $\quad [\vec{r}] = \mathrm{m}$ $\quad [q] \equiv \mathrm{C}$,

las unidades de la permitividad del vacío resultan $[\varepsilon_0] = \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{m}^2\mathrm{N}}$

Así

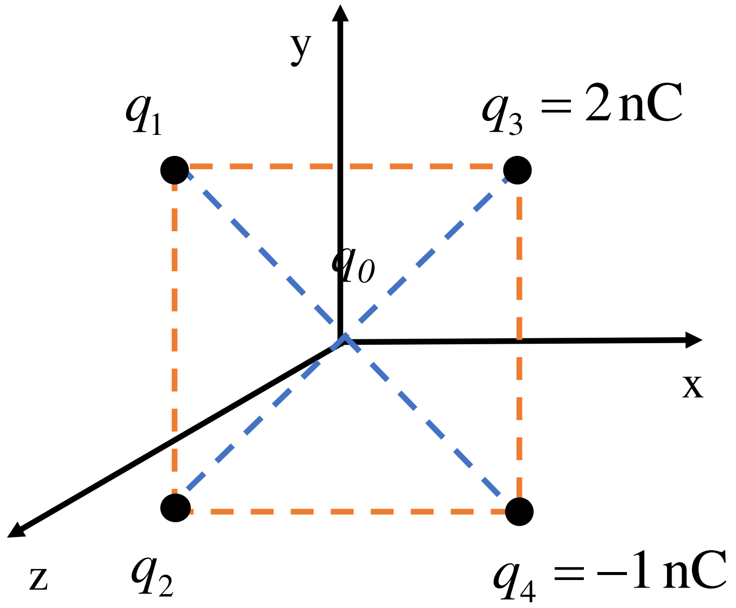
$$\boxed{\varepsilon_0 = 8{,}85\,10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{m}^2\mathrm{N}}}$$

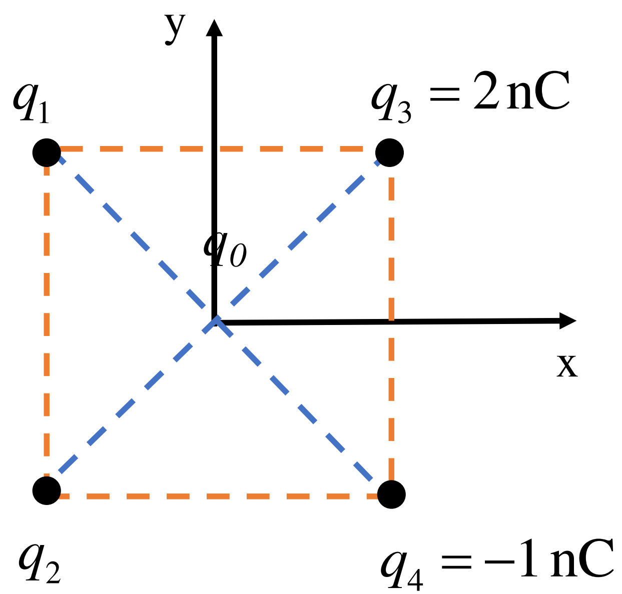
Retomando el ejercicio: **OBJETIVOS**

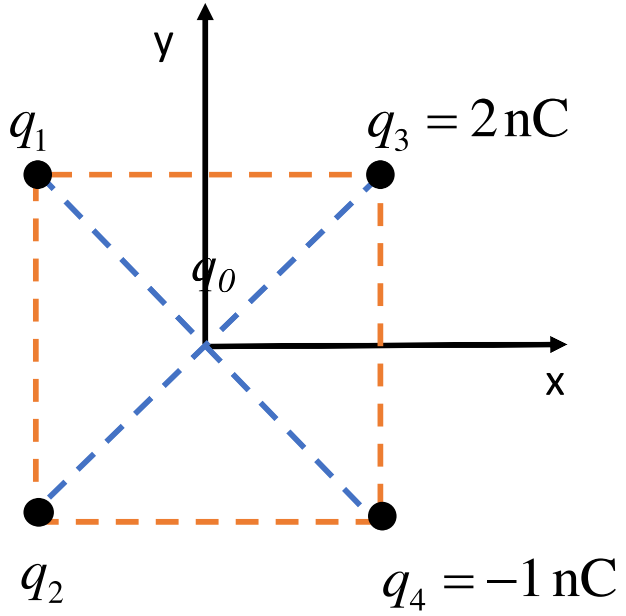
- Calcular las cargas q_1 y q_2 tal que la fuerza sobre la q_0 sea nula
- Verificar si es necesario conocer q_0 (tanto su módulo como su signo)
- Analizar si dependen de las dimensiones del cuadrado

Elijo un SISTEMA DE REFERENCIA
cartesiano

¿Vale la pena trabajar en tres dimensiones?







Para calcular la fuerza sobre q_0 se utiliza el **principio de superposición**, que plantea que la fuerza total actuante sobre una carga puede ser calculada como la suma vectorial de todas las fuerzas.

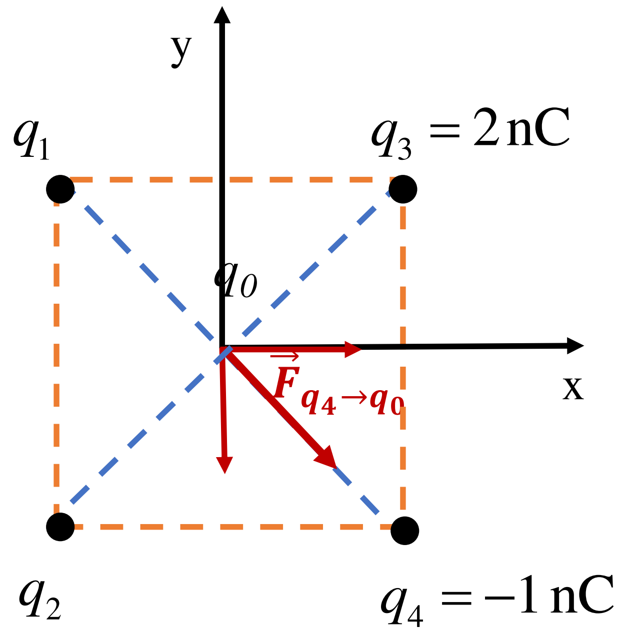
El enunciado pide que la fuerza sobre la carga q_0 sea nula:

$$\vec{F}_{q_0} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_{q_i \to q_0} = \vec{0}$$

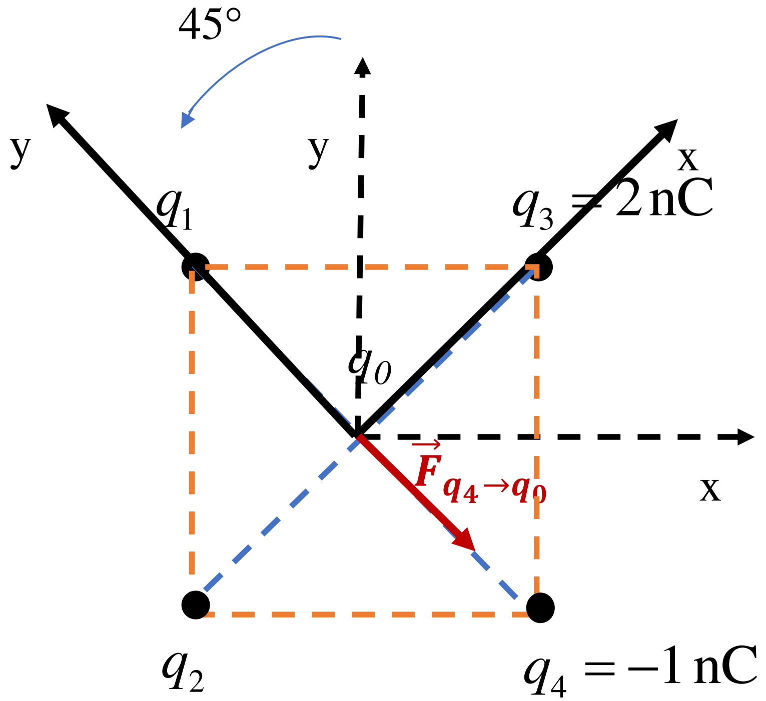
La nulidad de la fuerza implica que CADA COMPONENTE sea nula:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{q_0} \cdot \breve{\mathrm{i}} = F_{\mathrm{x}\,q_0} = 0 \\ \vec{F}_{q_0} \cdot \breve{\mathrm{j}} = F_{\mathrm{y}\,q_0} = 0 \end{array}\right\}$$

Me pregunto, ¿es este sistema de referencia el mejor?
La fuerza que ejerce cada carga en particular deberá ser descompuesta en sus componentes x e y.
¿Qué pasaría si elijo otro sistema? Tal vez uno más cómodo…

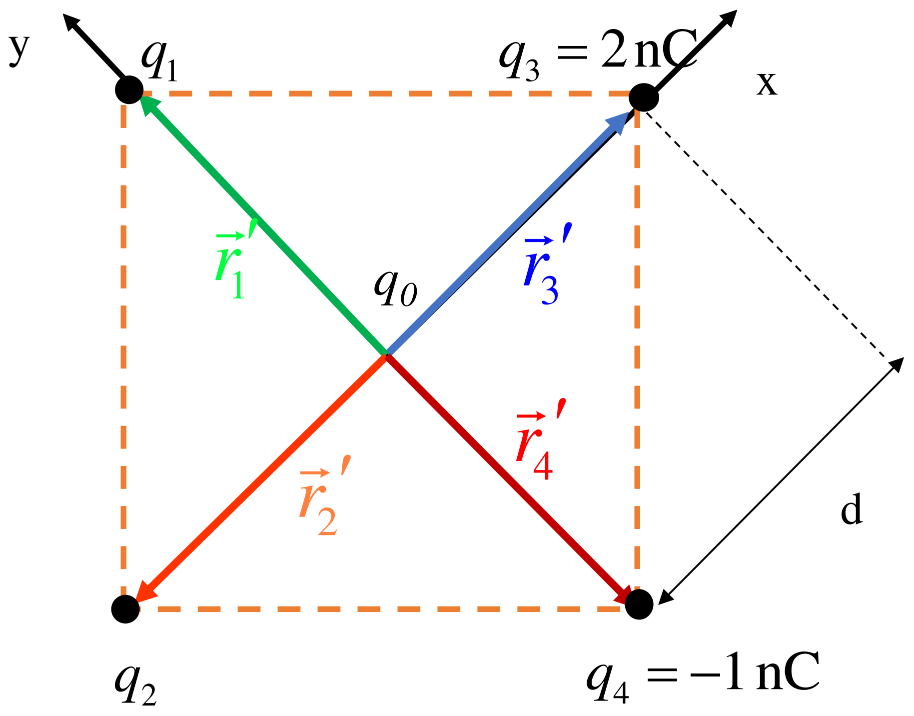


La fuerza de cada carga deberá descomponerse en x e y



Si se rota el sistema de referencia 45°, el problema se facilita significativamente ya que cada fuerza está paralela a la componente que le corresponde y no es necesario descomponerla

Es con este sistema que se continuará la resolución del ejercicio



Entonces:

$$\vec{F}_{q_0} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_{q_i \to q_0}$$

$$\vec{F}_{q_i \to q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 q_i \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i\,'}{\left|\vec{r}_0 - \vec{r}_i\,'\right|^3}$$

Analizo primero los vectores posición, se ven graficados arriba

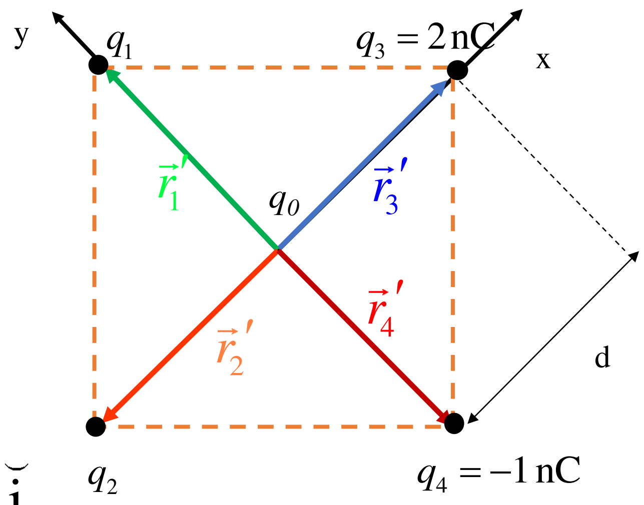
$$\vec{r}_1\,' = d\ \breve{\mathrm{j}} \qquad \vec{r}_3\,' = d\ \breve{\mathrm{i}}$$

$$\vec{r}_0 = 0\ \breve{\mathrm{i}} + 0\ \breve{\mathrm{j}}$$

$$\vec{r}_2\,' = -d\ \breve{\mathrm{i}} \qquad \vec{r}_4\,' = -d\ \breve{\mathrm{j}}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_0-\vec{r}_1' &= -d\ \breve{\mathrm{j}} \\ \left|\vec{r}_0-\vec{r}_1'\right| &= \sqrt{d^2}=d \end{aligned}\right\} \quad \vec{F}_{q_1\to q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q_1\frac{\vec{r}_0-\vec{r}_1'}{\left|\vec{r}_0-\vec{r}_1'\right|^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q_1\frac{-d}{d^3}\breve{\mathrm{j}}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q_1\frac{1}{d^2}\breve{\mathrm{j}}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_0-\vec{r}_2' &= d\ \breve{\mathrm{i}} \\ \left|\vec{r}_0-\vec{r}_2'\right| &= \sqrt{d^2}=d \end{aligned}\right\} \quad \vec{F}_{q_2\to q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q_2\frac{\vec{r}_0-\vec{r}_2'}{\left|\vec{r}_0-\vec{r}_2'\right|^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q_2\frac{d}{d^3}\breve{\mathrm{i}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q_2\frac{1}{d^2}\breve{\mathrm{i}}$$

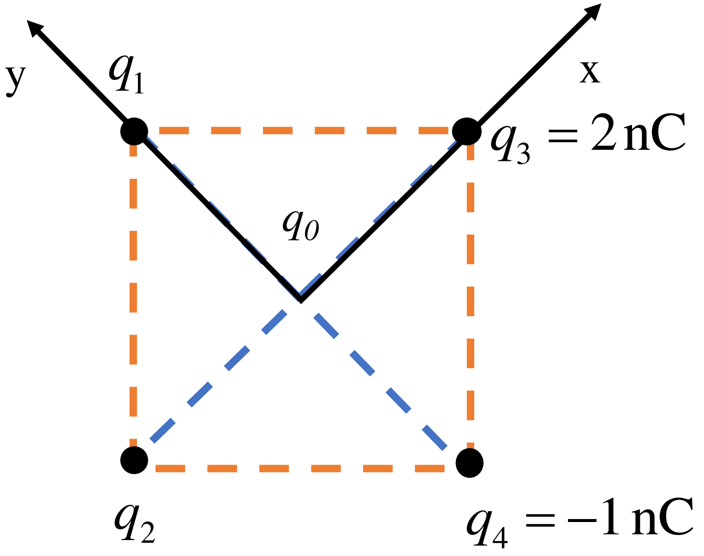


$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_0-\vec{r}_3' &= -d\ \breve{\mathrm{i}} \\ \left|\vec{r}_0-\vec{r}_3'\right| &= \sqrt{d^2}=d \end{aligned}\right\} \quad \vec{F}_{q_3\to q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q_3\frac{\vec{r}_0-\vec{r}_3'}{\left|\vec{r}_0-\vec{r}_3'\right|^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q_3\frac{-d}{d^3}\breve{\mathrm{i}}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q_3\frac{1}{d^2}\breve{\mathrm{i}}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_0-\vec{r}_4' &= d\ \breve{\mathrm{j}} \\ \left|\vec{r}_0-\vec{r}_4'\right| &= \sqrt{d^2}=d \end{aligned}\right\} \quad \vec{F}_{q_4\to q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q_4\frac{\vec{r}_0-\vec{r}_4'}{\left|\vec{r}_0-\vec{r}_4'\right|^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q_4\frac{d}{d^3}\breve{\mathrm{j}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q_4\frac{1}{d^2}\breve{\mathrm{j}}$$

$$\vec{F}_{q_1\to q_0} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 q_1 \frac{1}{d^2}\breve{\mathrm{j}} \equiv F_{q_1}\breve{\mathrm{j}}$$

$$\vec{F}_{q_2\to q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 q_2 \frac{1}{d^2}\breve{\mathrm{i}} \equiv F_{q_2}\breve{\mathrm{i}}$$



$$\vec{F}_{q_3\to q_0} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 q_3 \frac{1}{d^2}\breve{\mathrm{i}} \equiv F_{q_3}\breve{\mathrm{i}}$$

$$\vec{F}_{q_4\to q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 q_4 \frac{1}{d^2}\breve{\mathrm{j}} \equiv F_{q_4}\breve{\mathrm{j}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{q_0}\cdot\breve{\mathrm{i}} = F_{\mathrm{x}\,q_0} = 0}$$

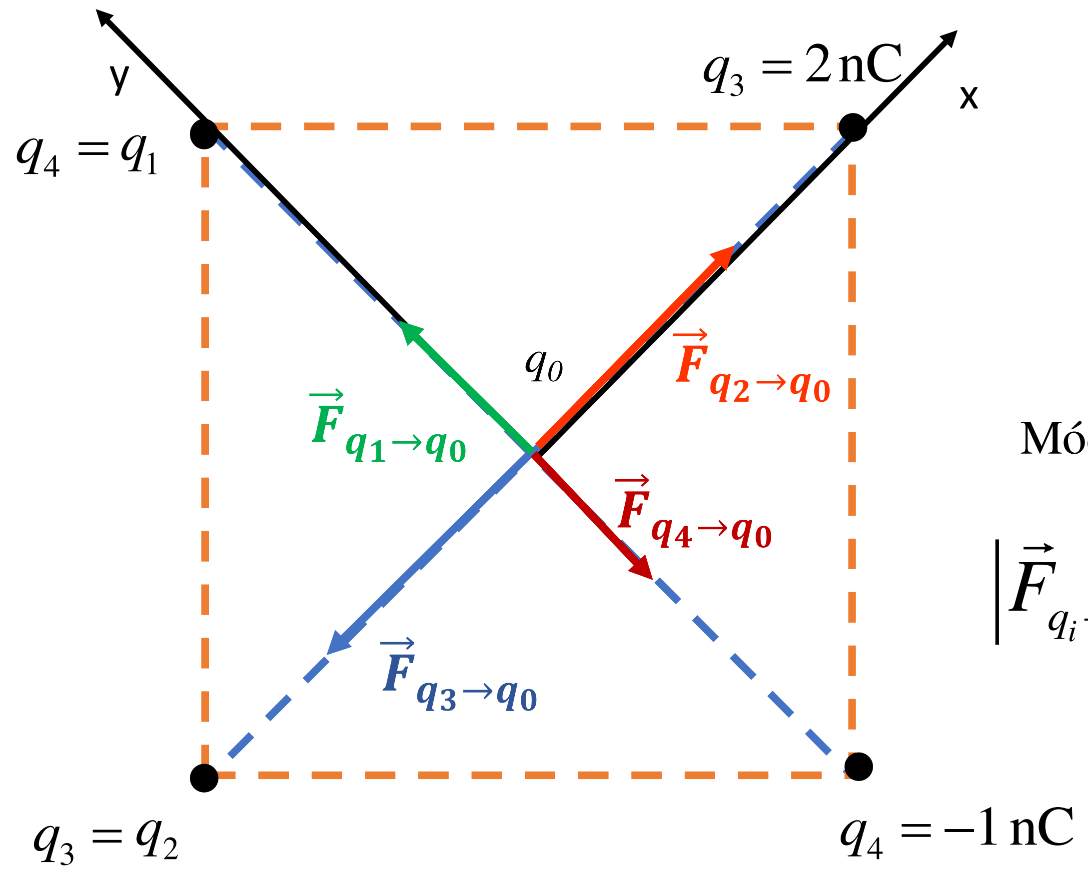
$$F_{q_2} + F_{q_3} = 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 q_2 \frac{1}{d^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 q_3 \frac{1}{d^2} = \overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 \frac{1}{d^2}}^{\neq 0}(q_2 - q_3) \Rightarrow \boxed{q_2 = q_3}$$

$$\boxed{\vec{F}_{q_0}\cdot\breve{\mathrm{j}} = F_{\mathrm{y}\,q_0} = 0}$$

$$F_{q_1} + F_{q_4} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 q_1 \frac{1}{d^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 q_4 \frac{1}{d^2} = \overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 \frac{1}{d^2}}^{\neq 0}(q_4 - q_1) \Rightarrow \boxed{q_1 = q_4}$$

Puedo graficar las fuerzas según los valores indicados, destacando el módulo, dirección y sentido.

Para poder hacer este análisis **supongo** que q_0 es positiva.
Esta es una *suposición* para facilitar el entendimiento ya que vimos previamente que es indistinto

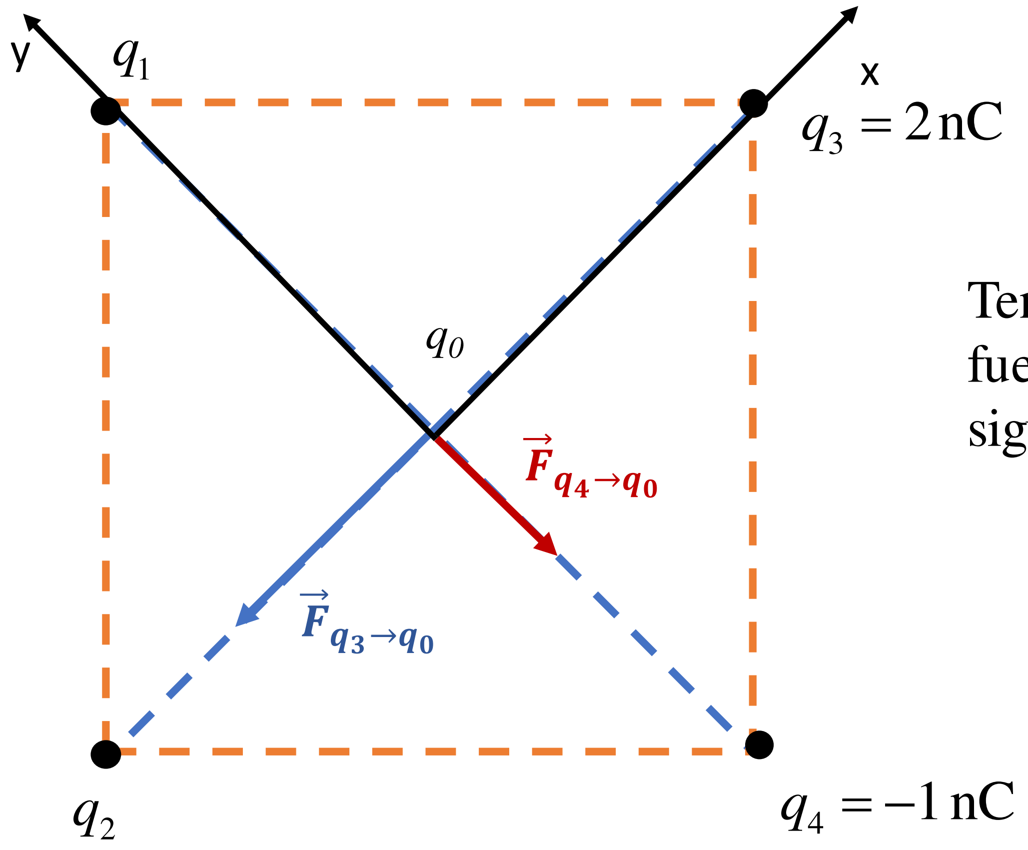


Módulo de la fuerza:

$$\left|\vec{F}_{q_i \to q_0}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left|q_0 q_i\right|\frac{1}{d^2}$$

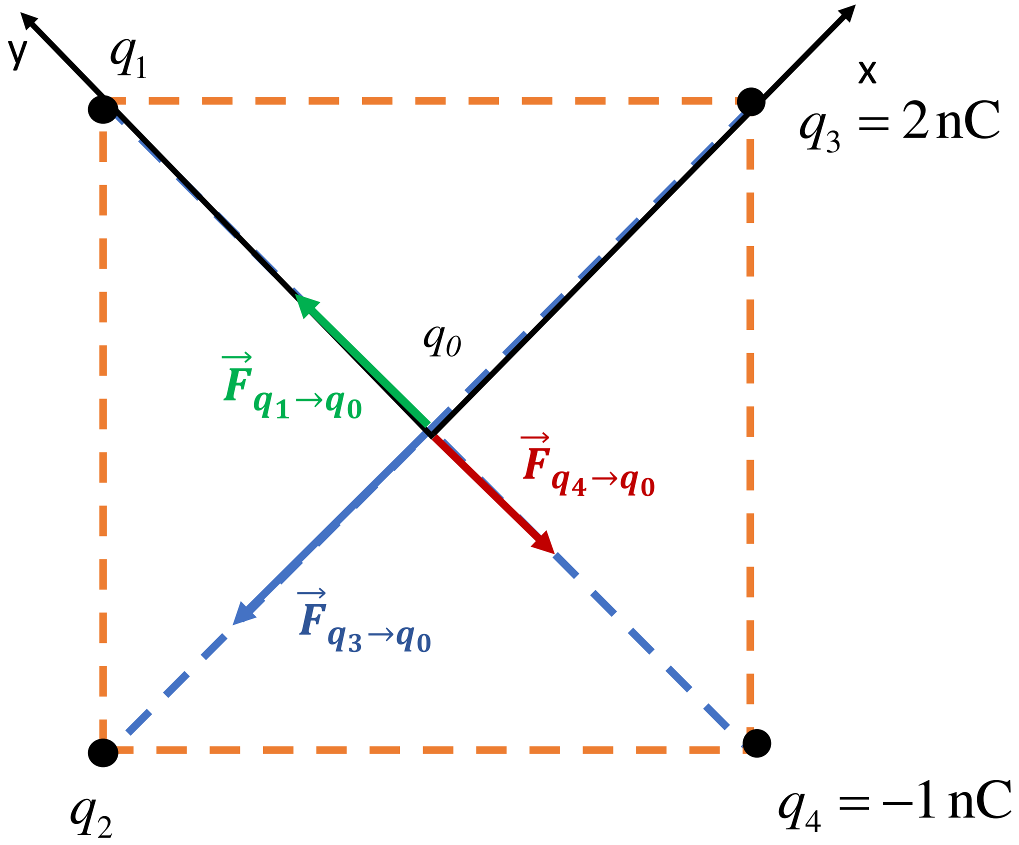
Entonces, la fuerza que q_3 le hace a q_0 es de **repulsión**, mientras que la de q_4 es de **atracción**.

Ahora que tenemos una mejor comprensión del significado de las ecuaciones, todo esto que fuimos haciendo se podría haber simplemente resuelto pensándolo bien y utilizando los conceptos de la Ley de Coulomb, sin necesidad de formalizar los cálculos:



Tengo entonces dos fuerzas conocidas, la fuerza que ejerce q_3 y la que ejerce q_4, siguiendo la suposición de q_0 positiva.

Analizo la fuerza que le hace q_1 a q_0:



$$\vec{F}_{q_1 \to q_0} = -\vec{F}_{q_4 \to q_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\vec{F}_{q_1 \to q_0}\right| = \left|\vec{F}_{q_4 \to q_0}\right|$$

$$\Downarrow$$

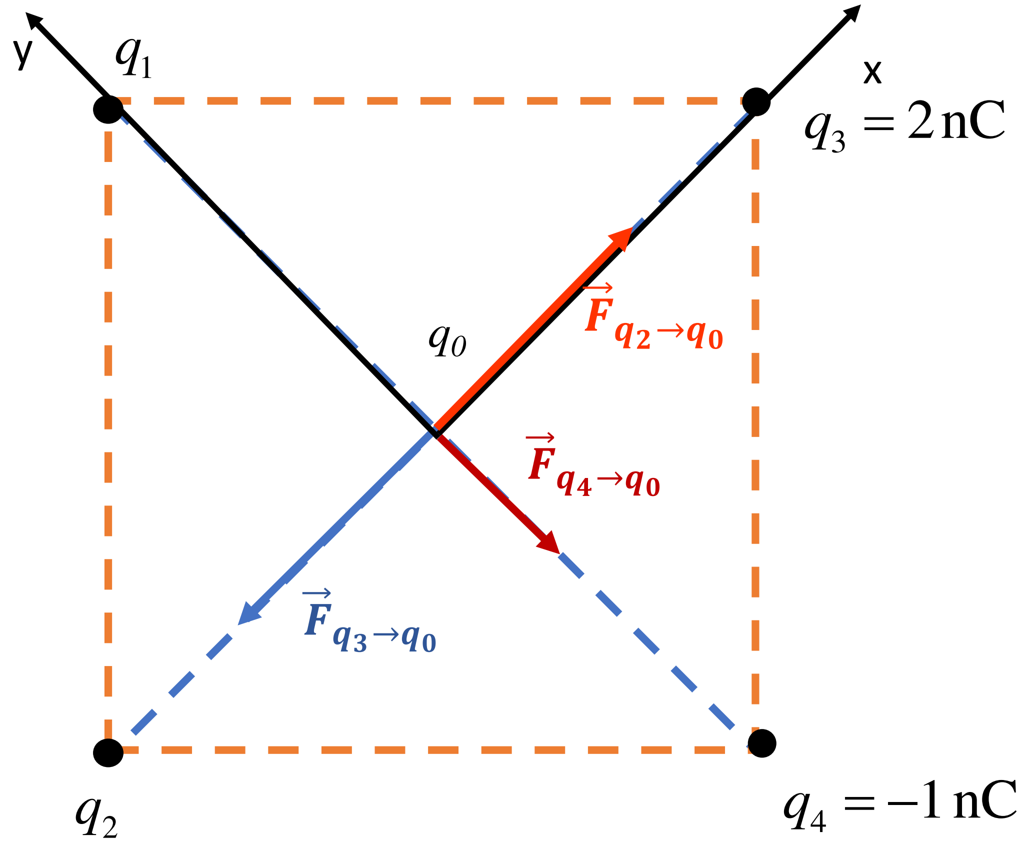
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 |q_1| \frac{1}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 |q_4| \frac{1}{d^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|q_1| = |q_4|}$$

¿Y el signo de la carga q_1?

Análogamente, analizo la fuerza que le hace q_2 a q_0:



$$\vec{F}_{q_2 \to q_0} = -\vec{F}_{q_3 \to q_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\vec{F}_{q_2 \to q_0}\right| = \left|\vec{F}_{q_3 \to q_0}\right|$$

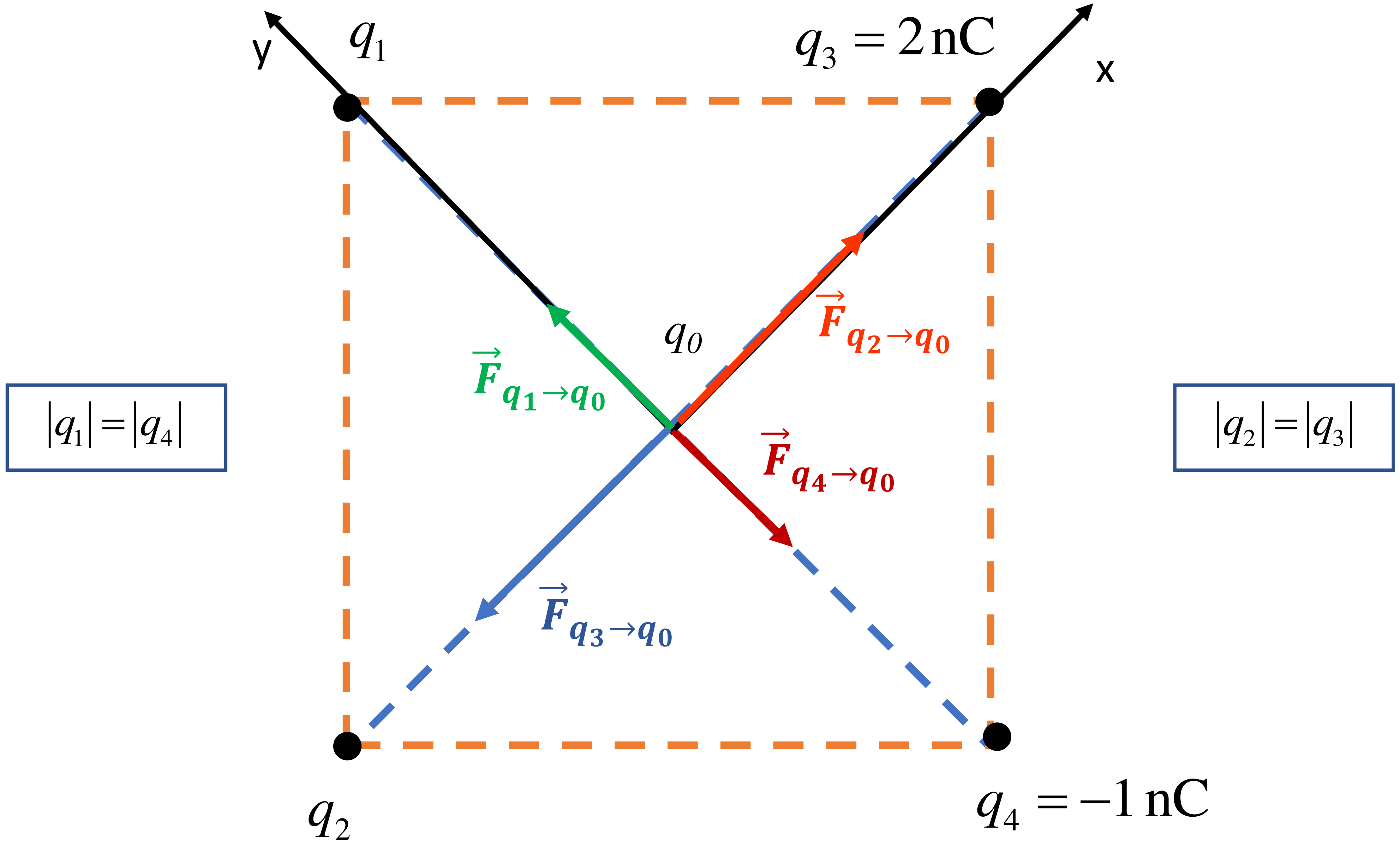
$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 |q_2| \frac{1}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 |q_3| \frac{1}{d^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|q_2| = |q_3|}$$

¿Y el signo de la carga q_2?



y
q_1
$q_3 = 2\,\text{nC}$
x
q_0
$\vec{F}_{q_2 \to q_0}$
$\vec{F}_{q_1 \to q_0}$
$|q_1| = |q_4|$
$|q_2| = |q_3|$
$\vec{F}_{q_4 \to q_0}$
$\vec{F}_{q_3 \to q_0}$
q_2
$q_4 = -1\,\text{nC}$

Se obtienen las mismas conclusiones que con la formalización de las cuentas. Simplemente, esta vez se utilizaron las ideas básicas de las fuerzas entre cargas expresadas a través de la Ley de Coulomb. Interpretamos el ejercicio y pudimos extraer conclusiones. Lo hicimos a partir ideas muy sencillas: la dependencia de las fuerzas eléctricas con los valores de las cargas y las distancias entre las mismas

Notar también que el resultado obtenido es **independiente de q_0** : las cargas sobre cada diagonal deben ser iguales . Si hubiésemos supuesto q_0 negativa, todas las fuerzas se invertirían pero las conclusiones serían las mismas.

El diagrama de la derecha plantea q_0 positiva, para seguir el análisis previo.

Además, en **ningún momento fue necesario definir la distancia** *d*. Es decir, que la distancia entre q_1 y q_0 y entre q_4 y q_0 eran iguales. Análogo razonamiento para q_2 y q_3.